Em defesa de um programa para a escola primária: lutas de representações

Denise Medina-USS
GHEMAT
denisemedinafranca@gmail.com

Neste artigo analiso os trabalhos de Zoltan Paul Dienes[1], Claude Gaulin e Lunkenbein, da Universidade Laval, Quebéc – Canadá sobre o processo de aprendizagem de Matemática. Busco caracterizar de que maneira são construídas as representações para o "ensino tradicional" e o "ensino moderno", utilizadas pelos autores como justificativas, no momento em que anunciam suas novas propostas didáticas. Para tanto, apresento algumas discussões sobre metodologias apropriadas para a elaboração de um programa de matemática para crianças, que ocorreram durante a Conferência de Hamburgo e publicadas no Relatório da UNESCO, em 1966.

Na articulação do texto, fiz uso da abordagem da história cultural e me apoiei nos conceitos de representação[2] e apropriação[3], postas por Chartier (1991).

Chartier (1991) sinaliza que, as lutas de representações têm tanta importância como as lutas econômicas para compreender os mecanismos pelos quais um grupo

---

[1] Matemático húngaro (1916-2014) obtém o título de Doutor em Matemática e Psicologia, pela Universidade de Londres, em 1939. Trabalha como professor em Highgate School e Dartington Hall School e nas Universidades de Southampton, Sheffield, Manchester e Leicester, todas na Inglaterra. Torna-se pesquisador do Centro de Estudos Cognitivos da Universidade de Harvard (1960-1961) e professor adjunto em Psicologia na Universidade de Adelaide (Austrália), no período de 1961 a 1964. É nomeado diretor do Centro de Investigação em Psicomatemática, em Sherbrooke, Quebec, em 1964 e, após o fechamento do Centro em 1975, por motivos políticos, dedica seus estudos à educação indígena, como professor na Universidade de Brandon, no Canadá, até 1978. (MEDINA, 2012)

[2] Chartier (1991, p. 16) define o conceito de representação como: [...] toda a tradução e interpretação mental de uma realidade exterior percebida. [...], as representações coletivas constroem o próprio mundo social: [...] construções que os grupos fazem sobre suas práticas e que não existem práticas que não seja representada. [...] A história cultural, tal como a entendeu, tem por principal objeto identificar o modo como em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade social é construída, pensada, dada a ler. Uma tarefa deste tipo supõe vários caminhos. O primeiro diz respeito às classificações, divisões e delimitações que organizam a apreensão do mundo social como categorias fundamentais de percepção e de apreciação do real. Variáveis consoantes às classes sociais ou os meios intelectuais são produzidos pelas disposições estáveis e partilhados, próprios do grupo. São estes esquemas intelectuais incorporados que criam as figuras graças às quais o presente pode adquirir sentido, o outro tornar-se inteligível e o espaço ser decifrado.

[3] A apropriação, a nosso ver, visa a uma história social dos usos e das interpretações, referida a suas determinações fundamentais e escrita nas práticas específicas que a produzem. Assim, voltar à atenção para as condições e os processos que, muito concretamente, sustentam as operações de produção do sentido (na relação de leitura, mas em tantos outros também) é reconhecer, contra a antiga história intelectual, que nem as inteligências nem as ideias são desencarnadas, e, contra os pensamentos do universal, que as categorias dadas como invariantes, sejam elas filosóficas ou fenomenológicas, devem ser construídas na descontinuidade das trajetórias históricas (CHARTIER, 1991, p. 180).

impõe, ou tenta impor, a sua concepção de mundo social, seus valores e seus domínios. Por esse motivo procurei relatar discussões ocorridas na Conferência a fim de tentarmos compreender as representações sobre o ensino de matemática para crianças. O diálogo passado e futuro, reiteramos, podem trazer novas ideias para nosso cotidiano.

Por esse motivo trago as propostas de Dienes, Gaulin e Lunkenbein para tentarmos compreender a representação dos autores sobre o que é ensinar e aprender Matemática bem como as discussões de seus pares sobre essa representação.

Dienes é um dos grandes pioneiros dos estudos alusivos à metodologia para o ensino nas séries iniciais e considerado referência no campo da Educação Matemática, em decorrência de suas teorias sobre a aprendizagem. Seus estudos exploram, principalmente, a construção de conceitos, processos de formação do pensamento abstrato e o desenvolvimento das estruturas matemáticas, desde os primeiros anos na escola. Traz inovações para a didática dessa área do conhecimento, quando propõe concretizações de conceitos matemáticos abstratos, a partir de manipulações de materiais estruturados em jogos, brincadeiras, histórias, etc. Seus primeiros livros, *Aprendizado moderno de Matemática* e a *coleção Primeiros Passos*, publicados originalmente na Inglaterra em 1960 e 1966, respectivamente, influenciam até hoje os trabalhos desse campo de pesquisa.

Trata-se de um sujeito que marca rupturas no ensino de Matemática, ao afirmar que ela deve ser vista como uma estrutura de relações e não apenas considerada como um conjunto de técnicas. Propõe, para o ensino, uma metodologia alternativa, adequada ao desenvolvimento de processos psicológicos. Divulga suas ideias, exercendo consultoria sobre o ensino de Matemática em vários países (Itália, Alemanha, Hungria, Nova Guiné e Estados Unidos) e para diferentes organizações (OECE e UNESCO), em todo o mundo. Participa também da fundação, em 1964, do ISGML (International Study Group for Mathematics Learning), que promove encontros sobre Educação Matemática, realizados na Hungria, Itália, Inglaterra e, em outros países, com desdobramentos na América Latina.

A implantação das reformas do sistema de ensino do Estado de São Paulo visto as deliberações da Lei 4.024/1961, perpassaram diferentes estratégias. Entre elas, destacam-se os cursos de capacitação ofertados pelo Estado e distribuição de publicações pelas Secretarias de Educação, para orientar as mudanças, de modo a fazer circular a representação de ensino, contendo prescrições metodológicas e diretrizes, para funcionamento das escolas, na nova estrutura organizacional da rede oficial de ensino e orientações referentes ao ofício do professor.

Em grande medida, as publicações distribuídas pelas Secretarias de Educação, preparando a comunidade escolar para mudanças, fizeram circular prescrições metodológicas e normativas, utilizados como estratégia de programar mudanças e controlar e uniformizar as ações das escolas do recém-criado sistema de ensino do Estado. Talvez, o modo como foi estruturada a implantação das reformas, exigiu das Secretarias de Educação a organização e distribuição de responsabilidades a órgãos específicos, o que provavelmente explica a diversidade de instituições e órgãos contratados pelo governo que elaboravam e ofereciam cursos aos professores, o que atribuiu ao GEEM[4] papel central nesse processo.

Pelo que se apreende do cruzamento das fontes, a publicação *Un Programme de Mathématique pour Le Niveau Élémentaire*, de autoria de Zoltan Dienes, Claude Gaulin et Dieter Lunkenbein, integrantes do Centro de Pesquisas Psicomatemáticas, da Université de Sherbrooke, foi traduzida e distribuída pelo GEEM, em 1969[5]. Essa publicação foi considerada documento-base para tentar uniformizar as orientações divulgadas nos cursos para professores da rede, dado a variedade de grupos e instituições encarregadas de produzir material de orientação de como ensinar aos professores das séries iniciais.

Vários fatores podem ter contribuído para a escolha dessa referência. Entre eles, o prestígio dos autores da referida publicação junto aos professores e o sucesso de sua implementação em classes experimentais, em diversas partes do mundo. Tudo indica que foi utilizado como estratégia de convencimento aos professores sobre a adequação

4 Fundado em 31 de outubro de 1961, tendo os professores Sangiorgi, como presidente, e George Springer, como colaborador. O GEEM - Grupo de Estudo do Ensino de Matemática tem atuação pioneira nos cursos de formação de professores com vistas à nova matemática das estruturas, à matemática moderna. O GEEM tem como liderança principal o professor Osvaldo Sangiorgi, que acaba por transformar-se em ícone do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Fundado em 1961, com sede na Universidade Mackenzie, o Grupo consegue apoio oficial para suas ações de formação, disseminando um novo currículo para o ensino de matemática, antes mesmo da oficialização da Matemática Moderna transformar-se em referência para os cursos primário e secundário (LIMA, 2006).

5 O artigo em que divulgam a nova proposta de Programa foi originalmente publicado em 1969, no *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)*. Afirmo que o GEEM apenas traduziu essa publicação e a distribuiu. Assim, quando neste texto for mencionada a publicação do GEEM (1969), fica subentendido que se trata da tradução do texto elaborado pelos educadores Dienes, Gaulin e Lunkenbein.

da nova proposta, na medida em que o texto demonstrava como concretizar, para crianças, a nova abordagem estrutural da Matemática.

O novo Programa foi produto de experiências, coordenadas por Dienes, durante dez anos, em classes experimentais de Sherbrooke, Austrália. A ação aglutinadora do ISGML incentivou a colaboração de seus membros, simpatizantes das ideias de mudanças, possibilitando a experiência com o Programa em várias partes do mundo.

Acrescente-se que este Programa é fruto de uma contribuição desses autores para o Relatório da Conferência de Hamburgo, intitulada Mathematics in Primary Education[6], realizada em 1961 e publicado pela UNESCO em 1966.

Considero por hipótese que as propostas oficiais de alteração didático-metodológicas são produto das apropriações do Programa pelas equipes das Secretarias de Educação, responsáveis em preparar os professores para as mudanças. Assim sendo, este estudo do texto tem a intenção de subsidiar reflexões, na medida em que pretende compreender lutas de representações entre matemáticos presentes na Conferência de Hamburgo (1966) e os autores do Programa.

Para tanto, de início, procuro sintetizar as considerações dos autores sobre a necessidade de um novo Programa de Matemática para as séries iniciais, procurando caracterizar as estratégias utilizadas para anunciar a nova proposta como a alternativa mais adequada e os princípios subjacentes.

O Programa exposto encontra-se estruturado da seguinte maneira:

I Introdução

II Concepções Subjacentes ao Programa

1 Concepções matemáticas

1.1 Conteúdos do Programa

2 Princípios psicológicos

3 Princípios pedagógicos

Na Introdução, os autores apresentam uma proposta de Programa para a escola elementar, produzindo a urgente necessidade de mudanças no ensino, de modo a abarcar as demandas contemporâneas e superar problemas. A estratégia para convencimento da

[6] Disponível em <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives/titre.html>. Acesso em 10 de nov. 2011

pertinência da nova proposta assemelha-se ao estilo que Dienes utiliza, ou seja, a crítica ao antigo, indicando limitações e enaltecendo o novo.

UN PROGRAMME DE MATHÉMATIQUE POUR LE NIVEAU ÉLÉMENTAIRE (1ère partie) * **A**

par Zoltan P. DIENES, Claude GAULIN** et Dieter LUNKENBEIN,
Centre de Recherches en Psycho-mathématique,
Université de Sherbrooke

INTRODUCTION

Tenter de construire un programme de mathématique qui soit à la fois cohérent, conforme aux besoins actuels, réaliste et applicable au niveau élémentaire[1], constitue une entreprise difficile et exigeante. Pour y arriver, il faut en effet tenir compte de l'état actuel de la *mathématique* et des plus récents développements de la *psychogénèse.*

Il est regrettable de constater la déficience des programmes traditionnels, à l'un ou l'autre de ces points de vue. A quoi cela est-il dû ? Sans doute à l'ignorance de beaucoup de mathématiciens sur les problèmes psychologiques que pose l'apprentissage de la mathématique. Sans doute aussi à une connaissance trop superficielle de cette discipline par de nombreux psychologues. Sûrement encore à un manque de familiarité, chez ceux qui ont conçu ces programmes, avec certains problèmes pratiques que pose l'enseignement dans une classe d'enfants.

Naturellement, la fabrication d'un programme n'admet pas de solution unique. Celui que nous allons esquisser ici constitue une façon, parmi d'autres, d'atteindre ces objectifs. Nous souhaitons donc que nos collègues oeuvrant en didactique de la mathématique ou en psycho-mathématique élaborent des solutions de rechange. Nos efforts conjugués devraient à long terme assurer un progrès décisif sur les programmes et les méthodologies du passé.

Le programme esquissé ici est le fruit d'une dizaine d'années d'expériences menées dans plusieurs parties du monde par le Dr Zoltan Paul Dienes, avec l'aide de collaborateurs travaillant sous l'égide du Groupe International d'Etudes pour l'Apprentissage des Mathématiques (I.S.G.M.L.)[2]. Son implantation a été faite dans plusieurs classes de Sherbrooke, où se poursuit l'expérimentation.

* Cet article paraît également dans la revue *"Math-École"* (Suisse) et, dans sa version allemande, dans *"Der Unterricht in der Grundschule".*

** Professeur au département de mathématique de l'Université du Québec à Montréal.

(1) Dans cet article, le *niveau élémentaire* correspond à des classes d'enfants de 5 à 11 ans en moyenne. Il comprend donc en particulier le niveau de la maternelle tel qu'on l'entend au Québec.

(2) Le Groupe International d'Études pour l'Apprentissage des Mathématiques (International Study Group for Mathematics Learning) regroupe des organismes de plusieurs coins du monde. Son bulletin *"Journal of Structural Learning"* (autrefois *"Bulletin of ISGML")* est publié chez Gordon & Breach, Londres-New York.

Bulletin de l'A.M.Q., automne-hiver 1969 29

Figura 1 – Programme de Mathématique pour Le Niveau Élémentaire. Fonte: Bulletin AMQ.

No discurso dessa introdução, apontam-se deficiências dos programas atuais como decorrência da falta de articulação entre matemáticos, psicólogos e pedagogos:

> A que fatores se deve essa situação atual do ensino de matemática? Sem dúvida, à ignorância de muitos matemáticos sobre os problemas psicológicos inerentes à aprendizagem da matemática. Sem dúvida também, ao conhecimento muito superficial dessa disciplina por numerosos psicólogos. (GEEM, 1969, p. 1).

Afirma-se que as contribuições trazidas pela Psicologia provocaram desafios ao ensino e aprendizagem de Matemática. Para vencê-los, o programa deve ser consistente com as necessidades atuais, realista e aplicável ao desenvolvimento cognitivo das crianças. As assertivas denotam a representação de um programa, com base psicogenética, expressa pela ênfase que o documento coloca em pontos de vista dos psicólogos.

Após as críticas ao antigo, os autores passam a discutir as dificuldades de produção de um programa que satisfaça a todas as necessidades de uma sociedade em constante evolução. Segundo eles (GEEM, 1969, p. 29), “é uma tarefa difícil e exigente”, visto que o novo tratamento dado à Matemática envolve muitas variáveis. Ora, isto significa que um dos fatores mais relevantes para o sucesso é a necessidade de oferecer à criança, possibilidades de intervenção, em um meio rico de situações que objetivem atender aos objetivos da Matemática, no estado atual, isto é, adequadas aos mais recentes estudos do desenvolvimento psicológico.

Essa exigência pressupõe um professor com conhecimento profundo da disciplina, ou seja, com aportes teóricos suficientes para oferecer às crianças um meio profícuo com maiores possibilidades de interação, frente a situações didáticas variadas, com maiores chances para concretizar ideias abstratas, inerentes ao processo de abstração de conceitos matemáticos.

Talvez, pelas dificuldades apontadas para elaboração de um programa que considere a abordagem estrutural da Matemática, favoreça a construção estruturas matemáticas, de acordo com os mais recentes estudos do desenvolvimento psicológico, os autores sustentem que a proposta ainda está em construção e, por isso, sujeita a mudanças significativas em razão das adaptações exigidas pela divulgação dos resultados das pesquisas mais recentes, tanto na Matemática como na Psicologia.

Ainda na Introdução, enfatizam a indissociabilidade de certos princípios psicológicos e pedagógicos em qualquer programa, dito moderno, de Matemática. Portanto, a implantação deve ser acompanhada de mudanças em todos os aspectos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem, ou seja, nas maneiras de entender o papel dos currículos, do professor, livros didáticos, do próprio ensino e aprendizagem, etc.

Cabe, aqui, observar que já nessa parte do texto, há sinais marcantes dos princípios que norteiam a proposta, que revelam uma representação de ensino e aprendizagem atrelada à Matemática, Psicologia e Pedagogia e a fundamentalmente cognitivista, apoiada, de maneira explícita, na Epistemologia Genética de Piaget.

Outra característica marcante é a incompletude apontada pelos autores, que ressaltam a contínua construção atribuída por eles, consequência das adaptações exigidas: "Naturalmente nessa perspectiva, a elaboração de um programa moderno, não admite solução única. [...] O programa é moderno e em contínua construção, sendo uma entre várias maneiras adequadas de ensinar matemática." (GEEM, 1969, p. 1).

Percebem-se, nessa afirmação, diferenças em relação à maneira com que Dienes apresenta suas propostas metodológicas, em outras obras, anunciando-as como sendo a única alternativa adequada. Tudo indica que o lugar de produção do artigo, periódico com distribuição em várias partes do mundo, determinou a mudança. Diferentemente, as críticas ao antigo são mais brandas e admitem a possibilidade da existência de outras propostas, também pertinentes.

Na segunda parte do texto, os autores passam a descrever os pressupostos que norteiam o Programa e os conteúdos a serem abordados. Finalmente, na parte seguinte, ilustram como operacionalizar a proposta, descrevendo algumas aplicações práticas realizadas em pesquisas sobre o assunto.

Os autores determinam três eixos norteadores para um programa "moderno": concepções matemáticas, psicológicas e pedagógicas, justificando a adoção de cada um deles, separadamente. Tudo leva a crer que os argumentos e justificativas sobre a ênfase dada à Psicologia e Pedagogia sejam respostas às críticas postas em discussão em encontros internacionais, principalmente na Conferência de Hamburgo, em 1966[7].

As concepções matemáticas subjacentes ao programa é o primeiro eixo trazido à discussão. Descrevem um cenário carente por reformas nos programas de Matemática e informam ao leitor algumas condições que permitiram as ações para mudanças, em classes experimentais. Citam os avanços da disciplina, principalmente decorrentes aos

[7] Interessante observar que, na Conferência de Hamburgo, em que foi publicada o Programa, também foram publicadas críticas a esse Programa e as réplicas de seus autores.

trabalhos do Grupo Bourbaki[8], como determinantes para a nova concepção da disciplina, a qual, apoiada na teoria dos conjuntos, tratada como uma estrutura única, enfatizando as estruturas matemáticas, possibilitou melhor visualização de suas aplicações e possíveis relações com outras disciplinas.

Essas considerações permitem entender as discussões iniciadas sobre a inadequação dos programas antigos e a necessidade de mudanças. Pouco a pouco, segundo os autores, as ações, visando à reforma dos programas de Matemática do ensino secundário, foram efetivadas.

Paralelamente à reforma dos programas do secundário, surge também a necessidade de rever e fazer o mesmo com os programas da escola elementar e, mais ainda, adequá-los ao plano psicológico. Decorrente de suas pesquisas na escola elementar, tentando responder a demandas, os autores propõem um novo programa de Matemática para a escola das crianças.

O ensino de Matemática, segundo eles, deve refletir as concepções e avanços da disciplina. Consideram que o “... ensino deve dar ênfase às estruturas matemáticas e lógicas, bem como aos conceitos unificadores de relações, funções (operadores) e morfismos" (DIENES; GAULIN; LUNKENBEIN, 1969, p.31). Assim, a tradução feita pelo GEEM (1969, p. 3), por sua vez, defende que o Programa.

> ...ultrapassa amplamente os quadros dos programas tradicionais, que se limitavam em geral, aos rudimentos de cálculo e das medidas convencionais. Não obstante, os novos programas não descuidam do aprendizado dos algoritmos práticos e outras aplicações. Ao contrário, acreditamos que, por sua estrutura e metodologia que o acompanha, permite assegurar uma compreensão mais profunda e uma maior aplicabilidade desses algoritmos, em comparação com o ensino tradicional, baseado no treinamento e na memorização.

A afirmação permite inferir que os autores recorrem à estratégia de construir uma representação para o programa antigo, de modo a criar a necessidade urgente de alternativas. Também revelam lutas de representação, no caso as lutas entre propostas de programa, que buscavam se tornar referência. Durante todo o texto reforçam a representação construída para ensino tradicional e moderno, recorrendo à descrição de

[8] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo sob o qual um grupo de matemáticos, na maioria francesa, escreve uma série de livros, onde expõem a Matemática moderna, que começam a ser editados em 1935. O grupo difundia, em livros e artigos, mudanças no ensino da Matemática, numa concepção estruturalista e abstrata, pregando a utilização de uma abordagem lógico-dedutiva, e defendia uma revolução interna na Matemática com base no desenvolvimento e estudo da noção de estrutura. (VITTI, 1998, p. 55).

exemplos de sucesso para ensino moderno e impertinências e inadequação para ensino tradicional.

Após definirem sua proposta como um "programa moderno", os referidos autores indicam a opção pelas estruturas matemáticas e lógicas, noções unificadoras de relações, funções (operadores) e morfismos. Não obstante a polêmica entre os matemáticos sobre a pertinência do ensino de estruturas matemáticas para crianças, que culminou na Conferência de Hamburgo, o Programa parte da hipótese de que é possível a aprendizagem das estruturas matemáticas na escola elementar:

> A necessidade de acentuar as estruturas matemáticas, em vez de condicionar as crianças, a certos comportamentos em resposta a certos estímulos, foi sublinhada fortemente durante recentes encontros nacionais e internacionais nos quais estavam reunidos matemáticos psicólogos. (GEEM, 1969, p. 3).

Tudo indica que a discussão trazida pelos autores, deve ser proveniente das lutas de representação, nos debates sobre reformas nos programas de Matemática na escola elementar, ocorridas em congressos:

> A criança deve aprender estruturas matemáticas tão cedo quanto possível? Em caso afirmativo, por quê? [...] Noções matemáticas simples e básicas deveriam sempre ser introduzidas como preparação para as mais complexas, ou devem essas noções básicas, às vezes, ser introduzidas após as mais complexas? (UNESCO, 1966, p.11).

Outro diferencial do Programa refere-se à maneira de exploração dos conteúdos matemáticos em uma proposta de ensino para a escola elementar. Defendem que, diferentemente dos programas antigos, a Matemática deve ser única:

> Antigamente a matemática era apresentada como uma justaposição de numerosos assuntos: aritmética, geometria, álgebra, análise, etc. Mas, em consequência da reestruturação de que foi objeto desde o início do século, a matemática conquistou uma Unidade (Por quanto tempo?) longamente ambicionada. (GEEM, 1969, p. 5)

Para isso, os conteúdos são distribuídos em cinco caminhos, que devem ser explorados paralelamente e com aprofundamento gradativo, interligados, mantendo sua integridade, por meio da presença, em todos eles, de conceitos, estruturas e elementos unificadores, expressos no Caminho 1.

Quadro 1 – Conteúdos Matemáticos, distribuídos em caminhos.

CAMINHOS	CONTEÚDOS MATEMÁTICOS
Caminho 1 **<u>Algébrico</u>**	• Noções de conjuntos (conjuntos de elementos, pertinência, complemento, intersecção, reunião, conjunto de conjuntos, inclusão, etc.). Representações por meio de Diagramas de Venn ou Carroll; • Relações, operadores, grupos, etc.; • Diagrama de relações de equivalência, de diferença, de ordem, etc. Propriedades das relações binárias, reflexibilidade, transitividade, simetria, etc.; • Operadores (no sentido de aplicação ou função), com casos particulares de relações. Relação entre operadores e entre cadeias de operadores. Operações binárias, comutatividade, associatividade, distributividade; • *Concretizações* variadas de estruturas matemáticas fundamentais: grupos, álgebra booleana, anéis, espaços vetoriais, (ou módulos sobre um anel), etc. Concretizações de isomorfismos e automorfismos de estruturas; • Introdução à axiomatização.
Caminho 2 **<u>Aritmético</u>**	• Aprendizagem do número natural a partir de conjuntos. Relações e operadores numéricos. Relações entre os operadores e cadeias de operadores numéricos; • Bases de numeração - As quatro operações aritméticas. Comutatividade, associatividade, distributividade. Generalização para os números racionais positivos; • Potências, logaritmos, raízes; • Introdução dos números negativos (a partir dos operadores aditivos ou como casos particulares de vetores); • A reta numérica, o plano, e o espaço cartesiano; • Generalização para polinômios. Formas proposicionais e conjunto solução; • Concretizações no domínio numérico das estruturas de grupo, anel, corpo; • Classes resto (módulo n).

Caminho 3 **Lógico**	⅄ Propriedades (atributos) de objetos ou de conjuntos de objetos. Operações sobre as propriedades: negação, conjunção, disjunção, implicação, equivalência. Representação dos maiores conjuntos associados às propriedades, com ajuda de diagramas de Venn e Carroll, de redes lógicas, de árvores ou cartões perfurados; ⅄ Iniciação à análise combinatória; ⅄ Propriedades compostas (cadeias escritas corretamente). Relações entre propriedades compostas; ⅄ Regras de inferência; métodos de raciocínio; ⅄ Tabelas de verdade. Quantificador existencial e universal.
Caminho 4 **Geométrico**	⅄ Figuras geométricas planas e no espaço. Relações entre as figuras geométricas; ⅄ Noções topológicas (fronteiras, regiões, conexidade, etc.), projetivas (retas, intersecção, conexidade, etc.), afins (paralelismo, similitude, etc.); euclidianas (distâncias, ângulos, etc.); ⅄ Medidas arbitrárias convencionais; ⅄ Operadores sobre figuras geométricas (transformações): simetrias, translações, rotações, homotetias e suas invariantes. Relações entre operadores e entre cadeias de operadores geométricos. Simetrias e rotações de poliedros regulares; ⅄ Concretizações de natureza geométrica de grupos matemáticos e de isomorfismos de grupos. Diagrama de grupos. Relações definidoras num grupo; ⅄ Introdução à axiomatização; ⅄ Transformações geométricas no plano com ajuda de coordenadas; ⅄ Concretizações de módulos (sobre o anel dos inteiros) e de espaços vetoriais.
Caminho 5 **Probabilístico e Estatístico**	⅄ Conteúdo ainda em estudo.

Fonte: Elaborada pela autora a partir do texto "*Un Programme de Mathématique pour Le Niveau Élémentaire*", traduzida e distribuída pelo GEEM (1969).

Quanto aos princípios psicológicos e pedagógicos subjacentes ao programa, os autores repetem as justificativas da Introdução, deixando clara sua representação dos para o Programa: "... apoiados nos trabalhos clássicos de Piaget admitimos a existência de estágios de desenvolvimento do pensamento. A criança do curso elementar encontra-se no estágio operatório concreto (o intuitivo)." (GEEM, 1969, p. 8).

Segundo Dienes (1969, p. 33), Piaget "foi o primeiro a perceber que o processo de formação de um conceito toma muito mais tempo do que se supunha anteriormente", visto que a construção conceitual relaciona-se ao desenvolvimento das estruturas elementares que compõem sua produção.

Nessa perspectiva, considerando os pressupostos de Piaget, entendemos que nada é inato e imposto sem que haja reação. Se o desenvolvimento assim permitir, tudo está em construção. Cada estágio de desenvolvimento, definido por ele, possui estruturas inatas e cada estrutura é um longo processo de elaboração. Piaget (*apud* LIMA, 1990) chamou este processo de "construtivismo sequencial", o qual aparece resumido no quadro abaixo:

Período Sensório-Motor 0 aos 2 anos, aproximadamente		A ausência da função semiótica é a principal característica. A inteligência trabalha através das percepções (simbólico) e das ações (motor) através dos deslocamentos do próprio corpo. E uma inteligência emimentemente prática. Não representa mentalmente o objeto e as ações Sua conduta social, neste período, é de isolamento e indiferença.
Período Pré-Operatório	**Período Simbólico** (2 aos 4 anos, aproximadamente)	Surge a função semiótica que permite o surgimento da linguagem, do desenho, da imitação, da dramatização, etc.. Podendo criar imagens mentais na ausência do objeto ou da ação, é o período da fantasia, do faz de conta, do jogo simbólico.
	Período Intuitivo (4 aos 7 anos, aproximadamente)	Desejo de explicação dos fenômenos. Distingue a fantasia do real. Capaz de organizar coleções e conjuntos sem, no entanto, incluir conjuntos menores em conjuntos maiores. Incapacidade de resolver problemas de conservação, ausência de operações reversíveis.
Período Operatório Concreto (7 aos 11 anos, aproximadamente)		Aquisição da reversibilidade por inversão, inclusão lógica, inicio da seriação, inicio de agrupamento de estrutura cognitiva, consolida as conservações de número, substância, volume e peso. Capaz de ordenar elementos por grandeza, incluindo conjuntos. Organiza o mundo de forma lógica ou operatória. Compreende regras. Início de relacionamento das operações concretas com objetos, mas não com hipóteses verbais.
Período Operatório Abstrato (11 anos em diante, aproximadamente)		Corresponde ao nível de pensamento hipotético-dedutivo ou lógico-matemático. Liberta-se do concreto. Desenvolvimento máximo das estruturas cognitivas, grupos, matrizes e lógica algébrica. Aparecem, esquemas operacionais que envolvem combinações de operações.

Fonte: Resumo feito pela autora

.

Partindo dessas concepções, durante os períodos sensório-motor, simbólico e das operações concretas (atividades de agrupamentos, seriação, classificação, simetria, substituição, tábua de dupla entrada e árvore genealógica), "ocorre uma grande elaboração operativa de coordenações de atividades e de estruturas elementares" (de rede, de grupo e topológicas). (LIMA, 1980, p. 50). Logo, o domínio de tais estruturas, mentalmente construídas, é imprescindível para a compreensão pela criança dos conceitos matemáticos "elementares" exigidos na escola.

Pode-se entender melhor as muitas justificativas dos autores quanto aos princípios psicológicos e pedagógicos adotados, quando entrecruzamos outras publicações sobre reforma na escola elementar, publicados pela UNESCO. Nelas, as lutas de representação de grupos de pesquisadores em Educação Matemática são explícitas:

> As descobertas dos psicólogos tendem a serem muito vagas, muito gerais, ou insuficientemente relacionadas a situações de aprendizagem de matemática para ser de uso e influenciar os rumos do processo de ensino da matemática. [...] os psicólogos não têm o conhecimento matemático necessário para fazer uma contribuição significativa para o ensino da matemática. (UNESCO, 1966, p.11).

Em defesa da inclusão do material psicológico no programa, os autores procuram responder as questões, esboçando algumas das razões para a o viés adotado. Afirmam que as contribuições mais significativas provêm de experiências realizadas com a participação de matemáticos, psicólogos e professores em exercício, e acrescentam que cada especialista poderia contribuir melhor para a construção de modelos teóricos. Assim, consideram a inclusão de pontos de vista dos psicólogos como um avanço em relação aos antigos programas:

> Qualquer que seja o grau de sucesso que os psicólogos têm desfrutado até então, a aprendizagem de matemática certamente traz consigo problemas de natureza psicológica, que necessitam de um exame mais detalhado do que a maioria dos professores estão equipados para oferecer. (UNESCO, 1966, p. 10).

Em seguida, os autores apresentam algumas considerações sobre os estudos dos processos cognitivos, mais complexos, que, de acordo com eles, intervêm na aprendizagem de Matemática. Defendem que, para aprender essa área do conhecimento, as crianças devem vencer etapas de abstrações, ligadas entre si de maneira complexa: "A partir de certo número de situações, constrói-se mentalmente uma propriedade comum a essas situações; depois, em compreensão, a classe correspondente a essa propriedade". (GEEM, 1969, p. 8).

Nessa perspectiva, a aprendizagem realiza-se do simples para o mais complexo. Os elementos da classe formada em compreensão durante o processo de abstração é denominado concretizações múltiplas do conceito ou da estrutura, que consiste em colocar as crianças em situações ricas em possibilidades, numerosas e variadas, de modo a exercitar e, a partir de concretizações, abstrair um conceito.

Os autores tentam legitimar as ideias apresentadas recorrendo a numerosas pesquisas realizadas em diferentes centros afiliados ao SMSG: Serbro, no centro de pesquisas psicomatemáticas, dirigidas por Dienes; em Budapeste, pelo professor Vargas; na Alemanha, no *Paedagogische Kchschule Heidelberg.* Contudo, mesmo respondendo a críticas, aceitam que restam ainda muitas questões a serem elucidadas a esse respeito.

A partir daí, os autores também descrevem as fases na abstração de um conceito, definidas por Dienes (1969), inspirado na teoria de Piaget.

Dienes (1969) produziu uma teoria sobre os processos de abstração de um conceito matemático. De acordo com ele, esse processo ocorre encadeado e gradualmente, em seis etapas. A novidade do enfoque, aqui, é para o estudo com crianças no estágio das operações concretas, período referente à escola elementar. Durante os períodos sensório-motor, simbólico e das operações concretas ocorrem uma grande elaboração operativa de coordenações de atividades e de estruturas elementares, imprescindíveis para a compreensão pela criança dos conceitos matemáticos "elementares" exigidos na escola.

Baseado em estudos Psicomatemáticos desenvolvidos em diferentes meios, Dienes (1969) estabelece que nesse período podem-se distinguir três fases para todo o processo de abstração de um conceito matemático. A cada novo conceito abstraído por meio da exploração de suas relações com outros já adquiridos, originam-se outros, mais complexos.

Na primeira fase do processo, as crianças exploram livremente os materiais e jogos, depois passam para a segunda fase, em que manipulam e exploram as regras dos jogos, tentando descobrir semelhanças entre elas. Na fase seguinte podem tentar construir isomorfismos que colocam em correspondência os elementos e as propriedades análogas nos diversos jogos. Assim, podem progressivamente chegar à abstração de um conceito, que pode servir de ponto de partida para novas abstrações.

Para exemplificar: a partir de variados objetos ou figuras quadradas, a criança manipula, explorando seus atributos, até conseguir lhes atribuir uma propriedade comum, no caso, "ser quadrado". Em seguida, procura formar a classe dos objetos quadrados, em um Universo estipulado. Logo, consegue abstrair o conceito de quadrado e, da mesma maneira, constrói os de círculo, triângulo, etc. Essas noções já adquiridas funcionam como suporte para abstrair o conceito de forma, depois de figura geométrica, etc.

De acordo com o autor (1969), depois de vencidas as três fases, a criança poderá, posteriormente, completar o ciclo de compreensão de um conceito matemático. Esse processo será ferramenta intuitiva que facilitará a aprendizagem eficaz da Matemática, cada vez mais formal.

Visto a quantidade de questões levantadas em Congressos Internacionais, o conceito de concretizações múltiplas é bastante discutido. Uma delas refere-se à necessidade de maiores estudos sobre a real eficácia do uso de material concreto, que pode desviar a atenção da aprendizagem: “[...] pode atrapalhar o aprendizado, distraindo o aluno dos elementos essenciais exemplificando e detalhando demais os aspectos físicos?” (UNESCO, 1966, p. 11). Ainda, há questões sobre o âmbito de sua aplicação:

> ... o princípio das concretizações múltiplas é aplicável para qualquer aluno em qualquer situação de aprendizagem? Onde é que a ajuda na abstração de conceitos, e onde atrapalha? Será o princípio da concretização múltipla aplicável em cada situação de aprendizagem? Será que este princípio não pode, por vezes, confundir o aluno? (UNESCO, 1969, p. 11).

Parece que, movido pelas polêmicas sobre a pertinência de suas propostas, os autores dedicam atenção especial no texto de proposta do Programa para responder e qualificar suas ideias, por meio de exemplos de sucesso.

> Para esclarecer o conceito “colocar a criança em presença de concretizações múltiplas”, daremos um exemplo: como serão tratados os conjuntos no curso elementar? Através de múltiplas atividades as crianças se encontrarão em presença de coleções concretas de objetos (blocos, bolinhas, cartões, etc.) ou de suas representações gráficas. Será inicialmente sobre esses objetos ou suas representações que elas efetuarão as operações de reunião, intersecção, complementação, etc. Assim, graças a uma interação com a realidade material, as crianças abstrairão progressivamente os conceitos de conjunto, pertinência, intersecção, etc. (GEEM, 1969, p. 4).

Como já discuti anteriormente, Dienes, Gaulin e Lunkenbein exemplificam suas ideias, explorando a teoria de conjuntos, para a qual as crianças em situações concretas, utilizam coleções particulares de objetos, para, em seguida, iniciar o estudo com conjunto, trabalhando com coleções de quaisquer objetos, porém mantendo como referência um conjunto de objetos específicos, com o intuito de possibilitar o uso da intuição, visto que os objetos pertencem a seu universo.

Também, ao longo do texto, defende-se a conveniência da aprendizagem por descoberta. Deve ser salientado que a atividade experimental não é de forma alguma unânime em seu apoio à aprendizagem pela descoberta. Aliás, a discordância pode ser verificada no Relatório de Hamburgo (UNESCO, 1966, p. 12): “uma variedade de fontes sugere que é muito difícil gerar condições de sucesso para este tipo de aprendizagem".

Algumas Considerações

Em síntese, tudo leva a crer que a representação sobre o que é um programa adequado de Matemática na escola elementar pode ser aquele que deve ser acompanhado de constantes cursos de formação de professores. Além disso, o sucesso está condicionado a um caminhar conjunto entre matemáticos, psicólogos e pedagogos. Ensinar Matemática, considerado a nova abordagem estrutural da Matemática, adequada e aplicável ao desenvolvimento cognitivo das crianças, exige um professor com conhecimento profundo da disciplina, ou seja, com aportes teóricos suficientes para oferecer às crianças um meio profícuo com maiores possibilidades de interação, frente a situações didáticas variadas, com maiores chances para concretizar ideias abstratas inerentes ao processo de abstração de conceitos matemáticos.

Dessa maneira, a implantação de um programa deve ser acompanhada de mudanças em todos os aspectos envolvidos aos processos de ensino e aprendizagem, ou melhor, nas maneiras de entender o ensino, aprendizagem, o papel dos currículos, do professor, livros didáticos, etc.

Posso dizer que os autores constroem e apresentam a representação, emergindo a necessidade de repensar o ensino para crianças: abordagem estrutural da disciplina, novas metodologias adequadas às descobertas da Psicologia e Pedagogia sobre como as crianças aprendem, ou melhor, um programa, fundamentalmente cognitivista, apoiado de maneira explícita na epistemologia genética de Piaget.

Possivelmente, essas mesmas discussões publicadas no Relatório de Hamburgo (1966), quando se nota pontos de vista divergentes em relação à proposta de Programa, também estão presentes nas propostas curriculares da Secretaria da Educação de São Paulo. Ao que tudo indica, um estudo aprofundado dessas propostas farão emergir as lutas de representações e trarão vestígios para compreensão das apropriações dos professores elaboradores desse documento sobre as ideias dos teóricos que fundamentam cada um deles.

Referências

ARQUIVO PESSOAL OSVALDO SANGIORGI (APOS). Disponível em <http://www.unifesp.br/centros/ghemat/paginas/arq_sangiorgi.htm>. Acesso em: 20 abr. 2011.

CERTEAU, M. **A invenção do cotidiano** – Artes de fazer. 8. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

CHARTIER, R. O Mundo como representação. Tradução Andréa Daher e Zenir Campos Reis. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 5, n. 11, p. 173-191, jan./abr. 1991. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ea/v5n11/v5n11a10.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2012.

DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática**. São Paulo: Herder, 1969.

DIENES, Z. P; GAULIN, C.; LUNKENBEIN, D. Un programme de mathématique pour Le niveau Élementare ($1^{\text{ère}}$ partie). **Bulletin de l' A. M. Q.**, v. 11, n. 1, p. 42-44, Jan. 1969d. Disponível em: <http://newton.mat.ulaval.ca/amq/archives/1969/1/1969-1-part10.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2012.

______.; GAULIN, C.; LUNKENBEIN, D.; Um programa de matemática para o nível elementar (1^{a} parte). In:**Bulletin de I' A.M.Q**. .Tradução Anita R. Berardinelli. São Paulo: GEEM, 1969. 17 p.

LIMA, F. R. **GEEM**: Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Departamento de Matemática. 2006. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUCSP, 2006.

LIMA, L. **Piaget para principiantes**. São Paulo: Summus, 1980.

MEDINA, D. **A produção oficial do movimento da matemática moderna para o ensino primário** do estado de São Paulo (1960-1980). 2007. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, Departamento de Matemática, São Paulo, 2007.

REVISTA DO ENSINO MUNICIPAL. São Paulo: Prefeitura Municipal de São Paulo, n. 2, fev. 1969; n. 3, mai./jul. 1970. Disponível em https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/99759

VALENTE, W. R. A matemática na escola: um tema para a história da educação. In: MOREIRA, D.; MATOS, J. M. **História do Ensino da Matemática em Portugal**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005. p. 21-32.

______. **O que é o número?** São Paulo: Projeto GHEMAT/CNPq, 2010.

VITTI, C**. Movimento da Matemática Moderna**: memória, vaias e aplausos. 1998. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, 1998.